

数学的活動に視点をあてた授業構成の研究

～授業の相と授業評価の観点から～

平岡 賢治*・酒井 一男**

(平成16年10月29日受理)

A Study of Construction of Lessons of Mathematics
in which the Aspect is Applied to Mathematical Activities
- From the view of Assessment and Aspect of Lessons -

Kenji HIRAOKA*・Kazuo SAKAI**

(Received October 29, 2004)

1 はじめに

21世紀を迎え、生徒をめぐる状況や社会の変化に対する教育の様々な課題に対応していくために、新しい教育の在り方が問われ、教育改革が進められている。また、これからの社会を担う児童・生徒が主体的、創造的に生きていくため、一人ひとりの児童・生徒に「確かな学力」を身に付けることが重要である（文部省，1999a，文部科学省，2002，2003）。特に、中学校数学科では、次の2点が強調されている。（文部省，1999b，p.2-3）

- (ア) 児童・生徒の創造性の基礎を培うため、例えば、多面的にものを見る力や論理的に考える力などを身に付けられるようにすること
- (イ) 実生活と数学との関連を意識し、様々な日常事象の中に不思議さを感じ取り、これを積極的に解明していく態度を育てるようにするため、自ら課題を見つけ、主体的に問題を解決していく活動が重要

このように、学校教育では、児童・生徒が主体的、創造的に生きる力を身に付けることが重要である。筆者達は、変化の激しい社会やリカレント社会などを生きていく生徒が、主体的、創造的に生きていくようにすること、また将来の社会や資源が乏しいわが国では、諸外国以上に学校教育で育成することが必要であると考えている。

一方、筆者達はこれまでの経験から、生徒が様々な活動に対して受動的な傾向が強くなっていることを感じている。このことは、情報化社会や少子化などの社会的環境もあるが、学校教育において教師が指示しすぎることも1つの原因であると考えている。特に、授業では受動的な傾向が強く、小学校・中学校を通して、知識や技能を伝達するだけの教え込みによる授業が多いことも大きな要因であろう。この解決には、授業を児童・生徒にとって主体的・創造的な学びの場にすることが重要である。特に、算数・数学教育では、身近な事象の数学化や、具体的な操作・実験からの数学化を通して、数学の創造や認識を高め

* 長崎大学教育学部

** 長崎県西彼杵郡長与町立長与第二中学校

る数学的活動の経験、さらに、この活動を通して驚きや感動の体験、数学の面白さを体感することが必要である。このためには、主体的に学ぶ意欲を高める問題解決的学習の実践を通じた授業改善が大切であると考ええる。

実際に、授業改善を試みている教師は少なくない。筆者の一人も、身近な事象や操作的な活動を利用した問題解決的学習に取り組んだり、いろいろな実践例を授業に取り入れてきた。しかし、これらは十分満足いくものではなく、課題も多く残った。これまでの授業実践の成果や課題をまとめると次のようになる。

○ 情意的側面

成果：生徒は楽しそうに、興味・関心を示し、積極的に学習に取り組むようになる。また、生徒に数学の有用性を感じさせることができる。

課題：操作的な活動の操作を楽しませることはできるが、その後の数学的な内容になると受動的になることが多く、教師主導で授業を進めるようになる。

○ 認知的側面

成果：生徒が自らの力で数学的な法則や性質などを見出した場合は、その理解の定着が図れる。また、数学的な見方や考え方も高められる。

課題：身近な事象を数学化する段階が、教師にとっても、学習する生徒にとっても、お互いに難しく感じる。このことが答えを求めればよいという状況を生み、数学的知識の意味の理解が不十分になることが多い。

○ 教育課程的側面

課題：時間内に授業のねらいが達成できないことが多く、授業が進まない。その結果、単元の導入や章末のそれぞれ1時間程度の実施になる。

これらの課題は身近な事象の数学化や操作的な活動、問題解決学習による数学的な知識の理解が、効果的に展開されていないことに原因があると考えている。さらに、教師が「数学を創造し、認識を高めていけるような数学的活動」の理解を十分できていないことに原因があると考えている。

筆者の一人は、中学校数学の選択教科で実施したグラフの移動と変換の授業について、生徒の数学的な考え方を考察した(酒井, 2000)。この研究では、生徒が数学的な考え方について十分理解できていない実態が明らかになり、授業において数学的な考え方を育てる方策の必要性を強く感じた。この実践的研究から、次の課題が明らかになった。

◎ 授業を生徒にとって主体的・創造的な学びの場にするための方策

- 問題解決的学習による授業の改善
- 身近な事象や具体的な操作をもとに、新しい知識や数学的な見方や考え方を身に付ける数学的活動の研究
- 身近な事象に関わる問題に数学的な知識・技能・見方や考え方を活用する能力を高める授業の研究

本研究では、「授業を生徒にとって主体的・創造的な学びの場にする」観点に立ち、次の5点を研究目的として設定する。

(1) 数学的活動を捉える視点を明らかにするために、数学的活動を誘発する要因を考察

する。

- (2) 授業における問題解決の相を明らかにし、問題解決的学習による授業構成について考察する。
- (3) 評価に関する基本的な考え方を考察し、授業評価の視点を明らかにする。
- (4) 実践的事例研究を行い、授業改善のための方策を明らかにする。
- (5) 数学的活動に視点を当てた問題解決的学習による授業構成の方法を構築する。

2 数学的活動を誘発する要因

中原(2000)は、算数・数学的活動を『子どもが主体的に取り組む、算数や数学をつくり出す活動』と述べている。この視点に立って、本節では「授業を生徒にとって主体的・創造的な学びの場にする」ための数学的活動について考察する。

(1) 学習指導要領解説の算数的・数学的活動

小学校学習指導要領解説算数編(文部省, 1999c), 中学校学習指導要領解説数学編(文部省, 1999b), 高等学校学習指導要領解説数学編(文部省, 1999d)に述べられている算数的・数学的活動は、小学校では外的な活動, 中学校では外的な活動と内的な活動の相互的・循環的活動, 高等学校では内的な活動を中心として捉えている。これは、児童・生徒の発達段階を考慮したものであり、各学校で扱う数学的内容と密接に関係している。また、基本的に算数的・数学的活動の具体的活動内容は、次のようにまとめることができる。

- 観察, 操作, 実験などの数理をともなう活動やその活動を振り返り, 身近な事象を数学化する活動
 - 既習の知識や数学的な見方・考え方を活用して考察・処理し, 新たな知識を獲得する活動
 - 新しく獲得した知識や数学的な見方や考え方を身近な事象に活用する活動
 - 問題を解決する活動やそれを振り返り, 発展的に考えたり, 一般化する活動
- さらに, これらの活動は, 大きく分類すると次の2つの側面に分けられる。
- (7) 身近な事象を数学化し, 数学の世界で考察・処理し, さらに身近な事象に活用するという側面
 - (4) 問題を解決し, それを振り返り, 発展させたり, 一般化したりする側面

(2) 数学的活動の先行研究

(7)の側面の先行研究として, H.Freudenthal(1973,1968)の数学的活動, A.Treffers(1987)の数学化, 島田(1977)の数学的活動, S.Krulik(1977)の4つの段階の問題解決のストラテジーが, (7)と(4)の両方の側面として, 大谷(2002)の数学的活動と社会数学的活動が, (4)の側面として, G.Polya(1954)の問題解決のストラテジーが考えられる。

以下では, 島田(1977)の数学的活動(図1)との関連性を中心に, 先行研究を考察し, 学習指導要領に述べられている数学的活動との関連性について考察する。S.Krulikの4つの段階の問題解決のストラテジーを詳しく表し, さらに数学の世界の発展的な活動まで表しているのが島田の数学的活動であると考ええる。大谷の分析を参考に, 島田の数学的活動とH.Freudenthalの数学的活動やA.Treffersの数学化の関係を分析すると, 次のよう

になる。

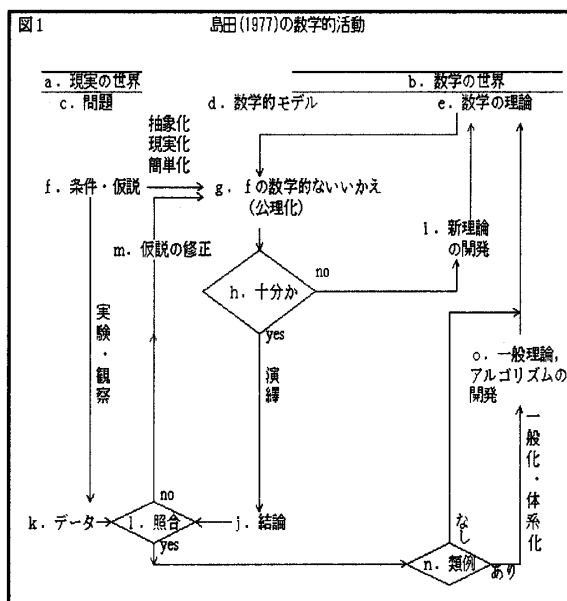
島田の現実の世界の問題に条件・仮説を設定し、さらに抽象化、理想化あるいは簡単化して数学のことばでいいかえる活動 ($f \rightarrow g$) は、H.Freudenthal の『現実の数学化』に対応し、また、A.Treffers の『水平的数学化』にも対応している。また、島田の数学の世界における類例を一般化し体系化する活動、数学の世界の内部の統一し向上を求めて現実の世界の役割を果たす活動は、H.Freudenthal の『数学の数学化』に対応していると考えられる。さらに、A.Treffers の『鉛直的数学化』は島田の数学の世界の内部における一連の過程に対応していると考えられる。

大谷は、島田の数学的活動を準拠棒として捉え、大局的視野では H.Freudenthal の数学的活動をもとに検討し、局所的視野では、G.Polya の問題解決をもとに検討している。すなわち、これらの数学的活動の関係を結びつけて考察しているのが、大谷の数学的活動と社会数学的活動である。また、島田の数学的活動と G.Polya の問題解決の相の関係について考察し、問題解決の過程と数学的活動の全体的過程は実質的には重なり合っているとしている。しかし、筆者達は、これまでの経験から島田の数学的活動は単元を1つの代表とする長期的なものとして捉え、G.Polya の問題解決の相は個別の問題に関する解決過程と捉えると、島田の数学的活動の一部になると考えている。また、島田が「実際の授業にあっては、その段階に応じて、この全過程の一部を取り上げていると見られる」と述べているように、島田の数学的活動の一部を取り上げているのが授業であり、授業の一部が G.Polya の問題解決の相と考えることができる。ここで、島田の数学的活動と学習指導要領の解説に述べられている数学的活動の具体的な内容をもとに整理すると、次のようになる。

現実の世界の問題を、現実の世界の経験から現実の世界の知識や数学の既習の知識をもとに理解し、抽象化、理想化あるいは簡単化して数学化していく。そして、数学化した数学的モデルに考察の対象を転化し、数学の理論、すなわち既習の知識や演繹などの数学的な見方や考え方を活用して、考察したり、処理したりする。既習の知識だけではうまく進まない場合には、新理論の開発、すなわち新しい知識を獲得する必要がある。また、類例などがある場合には、その類例に考察の対象を転化させ、一般化などの数学的な見方や考え方を活用して考察し、一般理論やアルゴリズムなどの新しい知識を獲得する。さらに、新しく獲得した知識を活用する現実の世界の問題を数学的な見方や考え方を活用して考察し、現実の世界の数学を理解する。

(3) 数学的活動を誘発する要因

学習指導要領の解説には、「算数・数学科の目標は算数・数学的活動を通して達成され



るもの」と述べられている。各学校種の目標は、それぞれの発達段階に応じて定められているが、基本的にはほとんどの部分で共通している。また、学習指導要領の改善の基本方針（文部省，1999b）「(7)創造性の基礎を培うため，……。(4)実生活と数学との関係を意識し，……主体的に問題を解決していく活動の重要性を述べている」とあり，数学的活動を通して，次の4項目を身に付けたり，高めたり，育てることを目標にしている。

- 基礎・基本的な知識や技能の獲得
- 数学的な見方や考え方の育成とその能力の高揚
- 創造性の基礎の育成
- 数学的な知識や技能，数学的な表現・処理，創造性の基礎となる資質や能力，数学的な見方や考え方などの数学を積極的に活用する態度の育成

『創造性の基礎の育成』に関しては，中央教育審議会における算数・数学科（小学校，中学校，高等学校）の改善の基本方針で，「基礎的・基本的な知識・技能を基にして多面的にもものを見る力や論理的に考える力など」と述べている。小学校学習指導要領解説算数編（文部省，1999c）の教科目標の説明には，既習事項を活用しながら新しい知識や方法を生み出していく創造的，発展的な学習の重要性が述べられている。中学校学習指導要領解説数学編（文部省，1999b）の教科目標の説明では，「単にでき上がった数学を知るのではなく，事象を観察して法則を見つけて事柄の性質を明らかにしたり，具体的な操作や実験を試みることを通して数学的内容を帰納したりして，数学を創造し発展させる活動を通して数学を学ぶことを経験させ，……ことが大切である」，高等学校学習指導要領数学編（文部省，1999d）の改訂の趣旨では，「論理的思考力，想像力及び直観力などの創造性の基礎」と述べている。また，「ほかにも創造性の基礎として重要なことが幾つかある。学習に興味・関心をもち，数学的に考察・処理する力もその一つである。例えば，興味・関心をもって試行錯誤を行い，新しい知識や技能などを見出す。次に，それを既習事項などと比較して体系的に整理し，より新しいものを創造していく過程には，数学的に考察し処理する力が必要である。それには，数学的な見方や考え方の認識や数学の方法の理解などが重要なものとなる。さらにまた，数学的な表現・処理の美しさや数学的な見方や考え方のよさを認識する豊かな感性なども創造性の基礎として重要である。」と述べている。

このように『創造性の基礎の育成』は，生徒の興味・関心などの情意的な面，基礎的・基本的な既習の知識や技能の活用，そして帰納的推論や演繹的推論などの数学的な見方や考え方の活用を通して，新しい知識や方法などを生み出し，創り出していく活動と捉えることができる。筆者達は，この「創造性の基礎の育成」を数学を活用して考察の対象を新しいものに転化させ，さらに新しいものを創り出していく活動と捉えると同時に，数学を創造の手段として活用する活動と考えている。

ところで，K.Devlin(2000)は，数学的活動を通して，身に付けたり，高めたり，育てるものを次のように述べている。「数学には次の4つの側面があり，

1. 計算，形式的推論，問題解決としての数学
2. 知るための方法としての数学
3. 創造の手段としての数学
4. 数学の応用

数学教育はこれらすべての側面を示さなければいけない。」

この4つの側面を、学習指導要領との対比で考えると、次の4項目

1. 計算、形式的推論、問題解決としての数学・・・基礎・基本的な知識や技能の獲得
2. 知るための方法としての数学・・・数学的な見方や考え方の育成とその能力の高揚
3. 創造の手段としての数学・・・創造性の基礎の育成
4. 数学の応用・・・数学的な知識や技能、数学的な表現・処理、創造性の基礎となる資質や能力、数学的な見方や考え方などの数学を積極的に活用する態度の育成

と、それぞれ対応させることができる。

見方を変えると、これら4項目を身に付けたり、高めたり、育てるために数学的活動を行うと考えてよい。すなわち、これら4項目が数学的活動を誘発していると捉えることができ、筆者達は、これらを数学的活動を誘発する要因と考える。

先にまとめた数学的活動を、数学的活動を通して身に付けたり、高めたり、育てる4項目で捉えると次のようになる。

現実の世界の問題を、日常の経験や知識と算数・数学を学習することによって身につけた既習の知識（既習の知識を活用することを通してさらに知識の獲得を図る）をもとに理解（身近な事象に活用されている数学的な知識や考え方を理解し、数学を活用する）し、抽象化、理想化あるいは簡単化して数学化（事象を数学的な見方や考え方をを用い、考察・処理すること）する。数学化によって作られた数学的モデルを考察の対象に転化（事象の見方を変えることによって、新しい対象へ転化させ、創造性の基礎を培う）し、数学的な味方・考え方や数学的方法の活用など既習の知識を活用して、考察・処理する。既習の知識だけではうまく進まない場合には、新たな考え方や方法を導入（新しい知識を獲得すること）する必要がある。類例などがある場合には、その類例に考察の対象を転化させ、一般化などの数学的な見方や考え方により、数学的な本質を考察したり、アルゴリズムなどの新たな数学的な見方や考え方などの新しい知識を獲得する。さらに、新しく獲得した知識を現実の世界の問題に適応することにより、数学的な見方や考え方の活用や現実の世界の数学を理解することが可能になる。

以上のことから、筆者達は数学的活動を誘発するものとして、次の4要因を提案する。

○ 知識の獲得

- ・既習の知識（日常生活における過去の経験も含む）を活用すること。
- ・新しい知識を獲得すること。

○ 数学的な考え方

- ・事象を数学的な見方や考え方をを用い、考察・処理すること。

○ 創造性の基礎

- ・事象の見方を変えることによって、考える対象を新たな対象へ転化させること。

○ 数学の活用

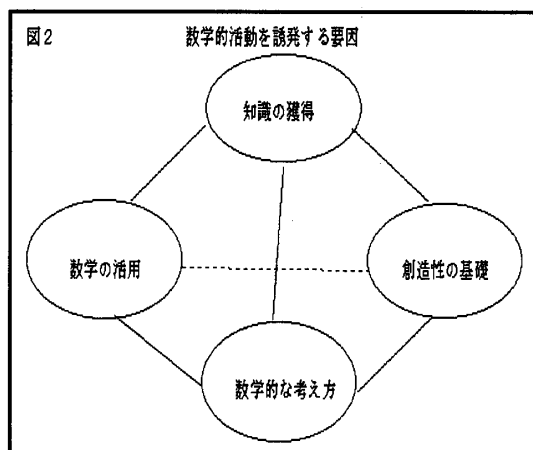
- ・身近な事象（他教科の題材も含む）に活用されている数学的な知識や考え方を理解すること。

筆者達は、これまでの経験から、授業における生徒一人ひとりの数学的活動は、これら4要因が相互に関係しながら行われるものと考えている。身近な事象の中にある数学を、生徒がそれまでに獲得した既習の知識や数学的な考え方をを用いて、その事象を理解したり、

そこに潜む数学を見出す活動である。既習の知識を活用するために数学的な考え方をを用いて考察・処理したり、逆に数学的な考え方をを用いた考察・処理をするために既習の知識を活用する。新しい知識を獲得するためには数学的な考え方が必要である。また、これらによって、思考の対象が転化され、創造性の基礎を培い、さらに他の事象への活用につながる。

筆者達が行った中学校第1学年の方程式の導入で等式を生み出していく学習では、上皿てんびんの左右の皿に載せられているものの2つの重さ（数量）の関係を、文字式で学習した既習の知識を活用（知識の獲得）して、記号化（数学的な考え方）し、等式を創り出し、上皿てんびんの左右の皿に載せられているものの重さの関係から等式へ考察の対象を転化（創造性の基礎）し、上皿てんびんに活用されている数学を理解（数学の活用）する。

このように、これら4つの要因は相互に関係していることから、筆者達は図2のような四面体ダイアグラムで表している（平岡，2004）。



3 授業構成の考え方

(1) 教師の役割

大村と荻谷夫妻（2003）は、『教えることの復権』の中で、「最近の教師は教えなくなった」という課題を提示し、大村の実践などを対話形式でまとめ、今日の教育に一石を投じている。その中で、荻谷は「教える目標と手段としての学習活動との関係をはっきりと見通せないために、教師は教えなくなる。そこには、次の二つのタイプの「教えない」教師がいる。ひとつは、生徒の自主性にまかせることが「自ら学び、自ら考える」教育になると見なす教師であり、二番目は、知識の伝達に終始することで、教えたことになっている教師である」と教えない教師について述べている。

数学的活動を誘発する4要因は、数学的活動を通して身に付けたり、高めたり、育てるものでもあったり、これら4要因は荻谷が言う「教える目標」と考えることができる。いかえると、数学的活動（数学）をできるようにすることが教える目標である。教える方法は授業構成の方法となる。筆者達は、教授・学習法として問題解決的学習を取り入れることで、「生徒にとって主体的・創造的な学びの場」に授業を改善していくことを考えている。しかし、現場教師にとって、問題解決的学習はいくつかの課題を授業で扱うとき、それぞれについて問題解決学習を考えるなどの課題があり、十分満足いくものではなかった。これまでに実践していた問題解決的学習による授業は、1単位時間を1つの問題解決の過程で構成していた。具体的には、「問題を把握する→見通しを立てる→解決を実行する→考えを深める→全体を振り返りまとめる」という問題解決の過程で授業を構成することが多かった。そこで、問題及び思考のレベルが上昇していくような問題解決的学習による授業の構成を考える。この学習における教師の役割は、次の3つに整理できると考えて

いる。これらの教師の役割は、授業や授業前の教師の活動である。

- ① 授業をデザインし、生徒の学習の場を設定する。
- ② 生徒が数学的活動により問題を解決できる授業構成を行う。
- ③ 生徒が問題解決後、生徒相互の社会的相互作用を通して反省的思考を促し、原問題への適応や条件の変化などで新たな課題を考察する。

(2) 授業における問題解決の相

中原(1995)は、問題解決指導のあり方として、次の3つのタイプに分類している。第1のタイプは、数学的な概念や法則を問題解決的に指導するもので「方法型」、第2のタイプは、教科書の特設單元などの中にあるいくつかの問題を通して行われる問題解決指導で「特設型」、第3のタイプは子どもが直面した現実的問題場面について、子ども自身が問題を設定しその解決を扱う学習で「設定型」、とそれぞれ呼んでいる。

「特設型」と「設定型」は構成的アプローチと共存でき、お互いに補完する役割を果たすように位置付けられ、「方法型」は協定的構成主義に立つ教授・学習と競合するものであるとしている。しかし、「方法型」にはいくつかの問題点があると指摘している。さらに、「方法型」の教授・学習にはいくつかのタイプがあるけれども、基本的にはG.Polya型ないしその修正に基づくものが多いとし、その問題を改善する方策として、次の2点を挙げている。

- 概念や原理・法則などの構成・理解を主たるねらいとする授業は、それに適した方法的原理に基づいて計画、展開することによって、そのねらいがよりよく達成される。
- 数学的な知識の構成には反省的に思考する過程を明確に位置付けた教授・学習が必要とされる。

さらに、反省的思考については、「前段階において、人間がある対象に対して操作的活動を行い、次の段階においてその操作的活動を反省的に思考し、それによって本質の抽象や一般化、論理化が行われていると考えられる。こうした思考は、数学的な概念形成や問題解決においてとりわけ重要な役割を果たす思考と言えよう。」と述べている。

筆者達は、「特設型」と「設定型」は授業構成の中で生徒の学習が効果的に進められるように設定する必要がある、授業構成は、基本的には「方法型」の問題解決的学習を考える。G.Polya型の授業構成を基本に考え、教授・学習法としてはR.Charles/F.Lester(1982)の問題解決の指導を参考にして、G.Polyaの問題解決の相の応用を考えている。

G.Polya (1954) の問題解決の相

G.Polyaは、問題解決の過程を次のような4つの相に区分し、それぞれの相における教師の問いや質問を述べている。

- 理解：問題を理解すること
未知のもの、わかっていることは何か、条件は何か。条件を満足させうるか、十分か、不十分か。図をかけ、適当な記号を導入せよ。条件の各部を分離せよ。
- 計画：計画を立てること
前にそれを見たことがないか。似た問題を知っているか。未知のものをよくみよ。未知のものが同じか、よく似た問題を思い起こせ。似た問題を使うことができないか。問題をいいかえることができるか。条件の一部を残し、他をすてよ。データ、

条件をすべてつかったか。

- 実行：計画を実行すること

解答の計画を実行するときに、各段階を検討せよ。

- 検討：振り返ってみること

結果や議論を試すことができるか。結果をちがった仕方で見ちびくことができるか。それを一目のうちに捉えることができるか。他の問題にその結果や方法を応用できるか。

R.Charles/F.Lester の問題解決の指導過程と問題解決の相

R.Charles/F.Lester は、G.Polya の研究に基づいて授業モデルを展開した LeBlanc の研究を発展させ、問題解決の指導過程を次の 3 つに区分し、それぞれの過程における教師の指導活動を述べている。

- BEFORE：問題について、全体で議論する時期

学級に対して問題を読み、用語や言葉について討議する。問題の理解に関して学級全体で討議させる。可能な解法のストラテジーについて学級全体で討議する。

- DURING：個人または小グループで解決の作業をしている時期

子供たちを観察したり、質問したりする。必要に応じてヒントを与える。必要に応じて発展させたものを与える。解を得ている子供たちに問題に答えることを要求する。

- AFTER：全体で解決の試みについて議論している時期

解を示させたり、討議させたりする。発展させた問題を討議させたり、解かせたりする。問題の特別な特色について討論させる。

また、子どもの問題解決の過程を次の 3 つの相に区分し、それぞれの相におけるストラテジーを述べている。

- 問題を理解すること

問題を読む。何を見出そうと試みているかをきめる。重要な資料を見出す。

- 問題を解くこと

パターンを探す。挿絵をかく。推測しチェックをする。整理した目録を作る。数式を書く。表を作る。論理的な推論をする。具体物を用いたり実演したりする。もともとたどって考える。問題を簡単にする。

- 問題に答えること、答えを評価すること

重要な情報をすべて用いたかを確認する。やったことをチェックする。答えが意味があるかどうかをきめる。答えを完全な文章に書く。

本稿では、問題解決的学習による新しい知識の獲得をねらいとする授業構成について、考察している。G.Polya と R.Charles/F.Lester の問題解決の過程は生徒一人ひとりの数学的活動を考察しているが、教授・学習法としての問題解決の相を考える場合、学習している集団における相を考えることになる。G.Polya の「理解」、「計画」、「実行」の相と「検討」の相の「結果や議論を試す、結果をちがった仕方で見ちびく、それを一目のうちに捉える」活動や R.Charles/F.Lester の「問題を理解すること」、「問題を解くこと」、「問題に答えること、答えを評価すること」の相は R.Charles/F.Lester の教師の指導過程の“BEFORE”と“DURING”で行われる生徒の活動である。これらの活動は連続的

であり、生徒一人ひとは問題を理解し、考えを深め、問題を解決する。この時、「計画」の相で、理解の不十分さや誤解に気づいたならば、改めて「理解」の相に戻る必要がある。「実行」の相でも、うまくいかず、改めて計画の練り直しや問題の理解が必要になり、「計画」や「理解」の相に戻ることもある。また、解決が得られた後も、「検討」の相の上記の活動をもとに、理解の不十分さや別の解決方法などに気づいたならば、改めて「理解」、「計画」、「実行」の相に戻ることになる。このように、これらの問題解決の過程は可逆的と考えることができる。すなわち、R.Charles/F.Lester の教師の指導過程の“BEFORE”と“DURING”において、学習している集団全体としては、問題に視点を当て、問題を考察の対象とし、生徒一人一人が自ら考察することを通して、理解を深め、試行錯誤しながら問題を解決している。筆者達は、これらの過程を授業における問題解決の「理解」の相と呼ぶ。

R.Charles/F.Lester の教師の指導過程の“AFTER”では、学習している集団全体で、「理解」の相を振り返ることを通して、「結果や議論を試す、結果をちがった仕方で導く、それを一目のうちに捉える、他の問題にその結果や方法を応用する」などの活動を行っている。この過程は、自らの考えと他の考えについて集団全体で議論することを通して、結果や方法が集団全体に共有されていき、解決された結果や方法に視点が移り、その結果や方法を考察の対象とし、新たな問題の「理解」へとつながっていく相と考え、筆者達はこの過程を授業における問題解決の「検討」の相と呼ぶ。

この「検討」の相が、新しい知識を獲得することをねらいとする授業ではとても重要になってくる。生徒一人ひとりの問題解決を、学習集団全体の社会的相互作用を通して反省的に思考し、問題の本質的抽象や一般化、論理化などを行う過程である。これは中原（1955）の「方法型」の問題解決的学習の問題を解決する方策の1つであり、授業を構成するとき明確に位置付ける必要がある。また、「理解」の相と「検討」の相を授業の中で効果的に展開し、授業のねらいを達成できるようにすることが大変重要である。

(3) 授業構成の方法

生徒が主体的に活動し、生徒自らが数学をするという考えの Do Math (古藤, 1991), 生徒が主体的に問題を変え、新しい問題をつくりだすための方略である What If Not ? (S.I.Brown/M.I.Walter, 1990), 島田のオープンエンドアプローチ, 能田 (1983) のオープンアプローチ, 片桐 (1988) の問題解決の過程, 中原の構成的アプローチをもとに、次の内容を授業構成に活用していきたい。

- 生徒が主体的に数学を創り上げていくことができるような授業
- 生徒の多様な考え方を活かすことができるような問題を取り入れた授業
- 生徒の一応の問題解決後に、教師及び生徒同士の社会的相互作用を通した反省的思考を明確に位置付けた授業
- 問題が問題を生み、問題を発展させていけるような授業

授業構想の段階で考察内容によるレベル(例えば、教材の数学化、数学的考察、教材への適用)を設定し、問題解決の相を「理解」の相と「検討」の相で構成し、各教材と指導のねらいを考察した授業構成を考える。これは、「生徒の一応の問題解決後に、教師及び生徒同士の社会的相互作用を通した反省的思考を明確に位置付け、問題が問題を生み、問題を

発展させていけるような授業」であり、問題解決の相における生徒たちの数学的活動と、数学的活動を誘発する要因によって、生徒たちの思考のレベルに視点を当てた授業構成である。

van Hiele (1986) の学習水準理論は、長期にわたる学習に対するものであるが、筆者達は、この理論を思考水準理論の基礎と考え、授業構成に適応させるために、van Hiele の学習水準理論について考察する。van Hiele は、オランダにおける高校教師としての教育実践上の課題であった、幾何指導における生徒の学習の困難性を克服するために、思考の水準を考察・研究し、次のような幾何学の学習における思考水準を設定した。それぞれの水準の不連続性を最も顕著な特性と述べ、水準間の切れ目の存在について説明している。

第1水準：視覚的水準

第2水準：記述的水準

第3水準：理論的水準

第4水準：形式論理学

第5水準：論理的な法則の性質

平林 (1987) は、この理論を次のような図でまとめている。また、学習対象と学習方法が区別され、ある水準での学習方法は、その次の水準では学習対象になっており、水準の飛躍は「方法の対象化」として捉えてることができると述べている。

水準	1	2	3	4	5
対 象	身のまわりのもの	図	性 質	命 題	論 理
方 法	図	性 質	命 題	論 理	

筆者達は、この学習水準理論において、次の3点を授業構成に活用することを考える。

- 生徒の学習の困難性を克服するための思考水準の設定
- 水準の最も顕著な特性である思考の不連続性の考察
- 水準の飛躍としての「方法の対象化」

前述の、中学校第1学年の方程式の導入の等式を生み出していく学習では、「数量の間の関係に関心を持ち、等式や方程式の意味を考える」を授業のねらいに設定し、生徒にとっての具体的な事象を「理科で学習した重さの量り方」と捉え、次のように方法や結果を考察の対象にしていくと考えている。

レベル	レベル1	レベル2	レベル3
内 容	具体的な事象の考察	数学的モデル化	表現方法の考察
考察の対象	粘土の重さ	左右の重さの関係	等 式
方法・結果	左右の重さの関係	等 式	方程式

問題解決型の授業では、このように1単位時間の授業内容に3つのレベルが存在していると考えることができる。異なるレベル間では生徒にとって不連続的考察の部分が多い。これまでの経験から考えると、問題解決で得られた結果や方法を、新たに考察の対象とする場面に相当している。例えば、〈創造性の基礎：考察の対象を転化させること〉が誘発する数学的活動の場面などもある。この場面では、生徒相互の社会的相互作用や教師による導きが必要な場面である。これを「検討」の相から新たな問題の「理解」の相に移っていく場面であると考え、このことはレベル間の移動と考えている。すなわち、生徒にとって得られた結論を思考の対象とする場面である。

授業では、生徒が数学の有用性を実感し、興味・関心を引き、学習意欲を高めるために、教師はできるだけ身の回りの具体的な事象を教材として扱うことが必要である。(注：特に単元の導入の段階であり、単元の途中では、既習の知識をもとにした生徒にとっての数学的な具体的な事象を扱うことが効果的な場合もある。)そして、生徒にとっての具体的な事象をもとに数学的な認識が高まっていくような授業構成が重要である。そのため、次のような問題及び思考のレベルからなる問題解決型の授業構成を考える。

生徒は、《具体的な事象に関する数理をとまなう問題》を(過去の経験や既習の知識)や「数学的な見方や考え方」をもとに「理解」し、学級全体で「検討」する(レベル1)。そして、〈対象を転化させ〉、数学化された問題へと変化させる。また、新たな「理解」が始まり、新しい問題を(既習の知識)や「数学的な見方や考え方」を用いて考察・処理し、「理解」する。さらに「検討」することで、〈考察の対象を転化させ〉、問題を発展させる(レベル2)。そして、新たな「理解」が始まり、(既習の知識または新しい知識)や「数学的な見方や考え方」を用いて考察・処理し、「理解」する。さらに「検討」することで数学的な認識を高め、授業のねらいが達成される(レベル3)。この最後の過程で、《身の回りの具体的な事象に関する問題》を扱い、《新しく獲得した知識を活用する》こともある。

このように1時間の授業の中で数学的な認識を3つの問題解決の過程を通して高めることで、具体的な事象からその授業のねらいが達成されると考える。それぞれの過程の間では、考察の対象が問題解決の結果や方法に転化されている。そこで、筆者達は、それぞれの過程を1つのレベルとしてとらえ、次のような3つのレベルで授業を構成していく。

レベル1：具体的な事象に関する問題を設定し、理解・検討を通して数学化する。

理解1 …《具体的な事象に関する数理をとまなう問題》について、問題の意味を(過去の経験や既習の知識)や「数学的な見方や考え方」をもとに理解する。

検討1 …個々で考えていたものを学級全体で振り返り、共有することで、〈考察の対象を数学化された対象に転化し〉、新たな問題を作る。

レベル2：レベル1をもとに数学化させた問題を理解し、検討することで問題を発展させる。

理解2 …新たに出た問題について、(既習の知識)や「数学的な見方や考え方」を用いて考察・処理し、理解を深める。

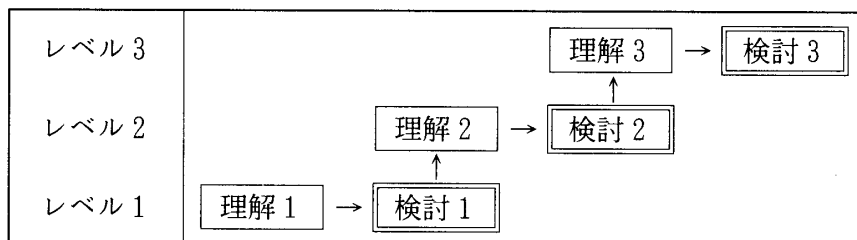
検討2 …さらに学級全体で議論をすることによって検討を重ね、条件や見方を変えることによって〈考察の対象を転化し〉、問題を発展させる。

レベル3：レベル2をもとに発展させた問題を理解し、検討することで、数学的認識を高める。

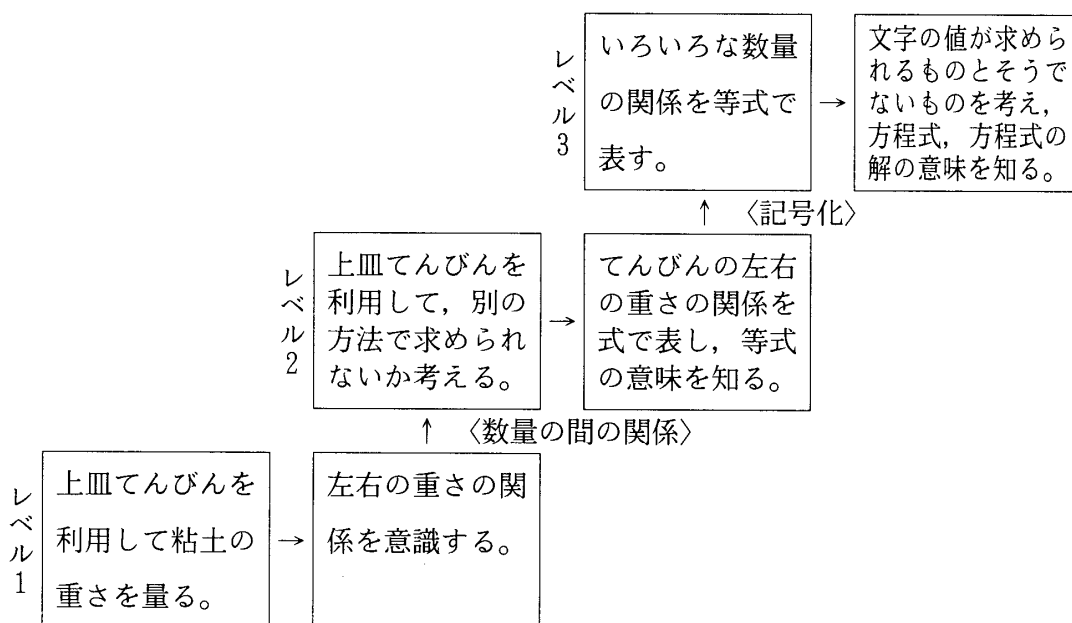
理解 3 …発展させた問題について、（既習の知識または新しく獲得した知識）や「**数学的な見方や考え方**」を用いて考察・処理し、理解を深める。

検討 3 …全体を振り返り、新しい知識の獲得などの授業のねらいの達成を学級全体のものとし、数学的認識を高める。

授業を構成するとき、次のようなダイアグラムを利用した図を用いて、授業構成を行う。



例えば、中学校第1学年の方程式の導入において、等式の理解の授業を次のようなダイアグラムを利用して授業構成を行った。



4 評価の考え方

筆者達は数学的活動を誘発する4要因（知識の獲得、数学的な考え方、創造性の基礎、数学の活用）が重要であり、授業は問題及び思考が3つのレベルで上昇するような問題解決的学習で構成できると考えている。授業の目標と構成方法があれば、それがどこまで達成できたかという評価を行うことができる。

長崎(2003)の評価に関する考えをもとに、評価の目的を考察すると、大きく2つに分けられると考える。1つは、生徒が何を理解しどのような能力を身に付けたのかという情報を得ることを通して、今後の学習の方向性や学習方法、学習内容などを理解できるようにすること、もう1つは、教師が教育活動についての資料を分析し、授業を改善できるようにすることである。

本稿の主な目的は「授業を生徒にとって主体的・創造的な学びの場に（改善）する」こ

とである。すなわち、授業改善であり、授業評価が特に重要となる。授業では教師は発問や周りの生徒の発言・提案に対する生徒の反応を理解し、評価するために生徒一人ひとりの数学的活動を捉える視点を持つことが必要になる。この視点として、数学的活動を誘発する4要因を考えることができる。前述のように、「知識の獲得」、「数学的な考え方」、「創造性の基礎」、「数学の活用」の視点から生徒の活動を評価し、その評価をもとに、生徒たちの望ましい方向を考えたり、対処の仕方を示すために、各レベルの教師の発問やレベル間の上昇を考察することを通して、授業改善していこうと考えている。

問題解決的学習のレベル1は、生徒にとっての具体的な事象を考察するレベルであった。生徒理解と教材研究をもとに、授業のねらいを達成するために、大多数の生徒が解決可能な問題を設定するように留意している。そこで、レベル1における生徒の数学的活動を捉え、分析することで、生徒の学習にとって必要な内容の理解度や能力の定着度を見ることができる。すなわち、このレベル1の生徒の数学的活動を捉え、分析することで、その後の授業の診断的評価ができる。

また、生徒の数学的活動を誘発する4要因で捉え、生徒の思考の対象が変容する場面を授業における問題解決の相で捉えることで、形成的評価が実施できると考えている。しかし、授業者が、そのような評価を実践できるようになるためには、生徒の数学的活動や変容する場面を捉える目を養う必要がある。そのためには、定期的に授業を分析する必要がある。そこで、次のような方策で授業を分析することを通して、指導と評価の一体化を目指している。授業記録をもとに、生徒へのアンケート結果・感想を参考にしながら、教師の活動と生徒の活動に視点を当て、数学的活動を誘発する4要因と問題解決的学習について、次の3つのことを行う。

- ① 数学的活動を誘発する4要因の検討
- ② 数学的活動を誘発する4要因をもとに各レベル及びレベル間の上昇の考察
- ③ 問題解決的学習の3つのレベルの改善

さらに、分析結果をもとに、3つのレベルの理解・検討を明記した授業構成を示し、授業を改善する。

5 まとめ

(1) 成果

これまでの授業実践から、授業における生徒の数学的活動の状況や変容の場面を、数学的活動を誘発する4要因で考察すると、生徒の活動を具体的に捉えることができた。また、生徒の変容の状態を問題解決の視点で考察すると、生徒にとっての具体的な事象から授業のねらいに向かって変容していた。考察の対象を転化させ、新たな理解を繰り返しながら変容し、前述の3つのレベルに対応していた。さらに、問題解決的学習で授業構成し、数学的活動を誘発する要因をもとに授業を評価することで、授業の本質的なねらいや生徒にとっての具体的な事象を授業者が捉えることができたようになった。

生徒の具体的な活動は計画とは異なることもあり、授業分析・評価を通して、レベルの上昇の捉え方に問題があることや、発問や机間指導などの問題点が見えてきた。この経験を通して、教材研究や生徒理解を深めることになった。これらのことは、より良い授業へ改善する方法を提示している。実際の授業では、生徒の活動が計画とは異なることも多い。

しかし、生徒の変容を数学的活動を誘発する4要因の観点から考察することで、生徒の数学的活動を捉えるとともに、授業構成の段階で授業改善することができる。実際に、授業の後、印象評価ではあるが授業を評価し、改善を加えた結果、他のクラスの授業では、生徒の数学的活動が自然に流れ、その後の授業まで効果的に流れることも多かった。

これまでの授業後の生徒の感想では、次のような意見が多かった。

- 身近な題材を利用した授業だったので、楽しく、わかりやすい。
- 最初は漠然としているが、授業が進むにつれ、いろいろなことがわかり、楽しく、おもしろく、わかりやすい。

身近な事象や具体的操作を活動に取り入れ、多様な方法を考えさせることで、生徒の興味・関心や学習意欲を高めることができた。また、昨年度からの長与第二中学校における実践を通して、日頃の生徒の会話の中で、「中学校になって、授業が進むにつれ、いろいろなことがわかり、とても楽しい。数学が好きになった。」という意見を聞くことが多くなってきた。生徒または教師によって、授業の中で考察の対象を転化し、レベルを上げていくことにより、生徒は数学的な認識の高まりを感じており、数学的活動を通して数学のよさや楽しさを体験し、これらを楽しめるようになってきている。すなわち、生徒の数学に対する意識が変容している。さらに、このような授業を積み重ねることで、生徒は自主的に数学化をすることができるようになると期待できる。

そして、『方程式』の授業後の生徒の感想の中に次のものがあつた。

- 今日の授業もとてもわかりやすく、内容がよくわかった。
- いつもと変わらない授業だった。

昨年度からほとんどすべての授業を、このような授業構成で実施したところ、生徒の数学的活動は自然に流れ、わかりやすかったようである。実際、テスト結果をこれまでの経験と比較すると、平均点が正負の数で約8点、文字式で約30点良かった。正負の数の学習において、単に計算ができるようになることをねらいとせず、計算法則などを生徒が見出すことができるように授業を構成した。生徒は帰納的推論や一般化などの数学的な考え方を活用して、計算法則などを見出していた。この経験が文字式の学習に生かされ、生徒の力を伸ばすことができた。また、授業者が教え込むのではなく、生徒が発見し、知識を構成し、さらに活用することを通して、生徒は基礎・基本的な内容を定着させており、このことも生徒の力を伸ばすことにつながった。さらに、社会的相互作用を通して、生徒は数学的コミュニケーション能力を高め、数学的に表現できるようになり、根拠まで話せるようになってきている。授業のねらいに向かって、思考のレベルが上昇していくような授業をデザインし、実践することで、主体的・創造的な態度や数学的な見方や考え方を育て、創造性の基礎を培うことができると考えられる。

以上のことをもとに総合的に考察すると、本研究の研究結果は次のようにまとめられる。

- ① 生徒にとっての具体的な事象から授業のねらいに向けた数学的活動を4要因で捉えることで、生徒の数学的活動が自然に流れる授業を構成できた。
- ② 授業における問題解決の相をもとに生徒の問題及び思考のレベルが上昇するような問題解決的学習による授業を構成し、実施した結果、生徒にとっての具体的な事象の考察から授業のねらいに向けて、生徒たちは考察の対象を転化し、新たな理解を繰り返す、数学的認識を高めながら変容していた。そして、この変容は、筆者達が考える

3つのレベルに対応していることがわかった。

- ③ 授業の生徒の活動や変容する場面を、数学的活動を誘発する4つの要因で考察することで、生徒の活動を具体的に捉え、授業を評価することができ、教材研究や生徒理解を深め、より良い授業へ改善することができた。
- ④ 実践事例の授業記録やアンケート結果・感想、テストの結果から、問題解決的学習を通して、生徒は次のような力を身に付け、育てていることがわかる。
 - 既習の知識を活用したり、新しい知識を獲得することを通して、基礎的・基本的な知識や技能を身に付けている。
 - 数学的な見方や考え方を活用することを通して、事象を数理的に考察する力を高めている。
 - 考察の対象を転化する活動を通して、創造的な態度や思考力を育てている。
 - 身近な事象に活用されている数学を理解することを通して、数学の有用性を感じ、数学を活用する態度や力を育てている。

(2) 今後の課題

今後は、実践事例を増やし、研究を深めていくことで、様々な教材や生徒集団に対して、レベルが上昇する場面での数学的活動を明確にし、授業の中で生徒が変容する場面を捉えることができるようにしていきたい。また、実践を通して、数学的な活動が自然に流れる授業へ改善されてきている。これは、授業者の実践力の高まりと生徒の数学に対する変容が影響していると考えられる。しかし、まだ、授業者による指示や導きによって、レベルを上昇させている面がある。実践を重ねるとともに、“Do Math”や“What If Not?”などの教授・学習法を活用したり、検討の相と反省的思考についての研究を深め、さらに、授業を生徒にとっての主体的・創造的な学びの場に改善していきたい。

参考文献

- 文部省(1999a), 中学校学習指導要領(平成10年12月)解説—総則編—, 東京書籍
- 文部省(1999b), 中学校学習指導要領(平成10年12月)解説—数学編—, 大阪書籍
- 文部科学省(2002), 確かな学力向上のための2002アピール「学びのすすめ」
- 文部科学省(2003), [確かな学力]を育む[わかる授業]の創意工夫例
- 酒井一男(2000), 平成12年度第54回九州算数・数学教育研究大分大会研究集録, p98
- 中原忠男編集(2000), 算数・数学科重要用語300語の基礎知識, p132, 明治図書
- 文部省(1999c), 小学校学習指導要領解説, 算数編, 東洋館出版
- 文部省(1999d), 高等学校学習指導要領解説, 数学編・理数編, 実教出版
- H.Freudenthal(1973), Mathematics as an Educational Task, D.Reidek Publishing Company
- H.Freudenthal(1968), Why to Teach Mathematics so as to be Useful, Educational Studies in Mathematics vol1 3-8
- A.Treffers(1987), Three Dimensions, D.Reidel Publishing Company
- 島田茂(1977), 算数・数学科のオープンエンドアプローチ, みずうみ書房
- S.Krulik(1977), PROBLEMS, PROBLEM SOLVING, AND STRATEGY GAMES,

- Mathematics Teacher 70(8), p649-652
- G.Polya 著, 柿内賢信訳(1954), いかにして問題をとくか, 丸善株式会社
- 大谷実(2002), 学校数学の一斉授業における数学的活動の社会的構成, 風間書房
- K.Devlin(2000), The Fources of Mathematics, NCTM 2000YEARBOOK, p16-27
- 長崎栄三編著(2003), 中学校数学科新しい評価の在り方ー相対評価から絶対評価へー, p71, 明治図書
- 平岡賢治(2004), 数学的活動に視点をあてた授業構成に関する研究, 全国数学教育学会誌 数学教育学研究 第10巻 p21-28
- 大村はま・荻谷剛彦・荻谷夏子(2003), 教えることの復権, ちくま新書
- 中原忠男(1995), 算数・数学教育における構成的アプローチの研究, 聖文社
- R.Charles/F.Lester 著, 中島健三訳(1982), 算数の問題解決の指導, 金子書房
- 古藤怜(1991), Do Math の指導, 東洋館出版
- S.I.Brown/M.I.Walter 著, 平林一榮監訳, いかにして問題をつくるかー問題設定の技術ー 東洋館出版
- 能田伸彦(1983), 算数・数学科オープンアプローチによる指導の研究, 東洋館出版社
- 片桐重男(1988), 問題解決過程と発問分析, 明治図書
- P.M.van Hiele(1986), Structure and Insight, ACADEMIC PRESS,INC
- 平林一榮(1987), 数学教育の活動主義的展開, 東洋館出版社